Reihen I

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge.

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$ n-te Partialsumme

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_i}_{\text{symbolisch}}}$$ (Folge von Partialsummen) Reihe

Reihe konvergent: Folge der Partialsummen konvergent

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S}$$

(sonst divergent)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty}$$

$\uparrow$ bestimmt divergent

Reihenfolge bei Reihen wichtig!

geometrische Reihe

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

$$\sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{q^{m+1}-1}{q-1}$$
$(q \neq 1)$

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ konvergent $\Rightarrow \boxed{(a_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ Nullfolge (notwendiges Kriterium)

a_k Nullfolge $\not\Rightarrow$ Reihe konvergent

$\boxed{(a_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ keine Nullfolge $\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ divergent

Leibniz-Kriterium

$\boxed{(a_k)_{k\geq 1}}$ reelle monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k}$ (bedingt) konvergent

(Absolute Konvergenz) → Basis

i) $k_0 \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ reelle Reihe, $\boxed{a_k \geq 0}$ $\forall k \geq k_0$.

Die Reihe konvergiert $\Longleftrightarrow$ Folge der Partialsummen beschränkt

ii) $k_0 \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$ reelle ~~Summen~~ Reihen, $\boxed{b_k \geq a_k \geq 0}$ $\forall k \geq k_0$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent — schwacher Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent — Majoranten-

Reihen II

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

Bedingt konvergent: konvergent, aber nicht absolut konvergent

dann: $\boxed{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|}$ (Dreiecksungleichung für absolut konvergente Reihen)

Majoranten-/Minorantenkriterium

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ komplexe Reihe

i) $k_0 \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}$ konvergente reelle Reihe, $|a_k| \leq c_k$ für $k \geq k_0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, $\boxed{\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k}$

ii) $k_0 \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} d_k}$ divergente reelle Reihe, $d_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

$|a_k| \geq d_k$ für $k \geq k_0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent

Quotientenkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ komplexe Reihe

i) es gibt $0 < \beta < 1$ u. $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_k \neq 0$ und

$\boxed{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \beta}$ für $k \geq k_0$ $\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent

$\tilde{\beta} := \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ reicht zu zeigen

ii) es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_k \neq 0$ und

$\boxed{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1}$ für $k \geq k_0$ $\rightarrow$ Reihe divergent

iii) keine der beiden Bedingungen $\Rightarrow$ keine Aussage über Konvergenz

Reihen III

$$\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$ Exponentialreihe

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$$ harmonische Reihe → divergent

Wurzelkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ komplexe Reihe

$\boxed{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1}$ reicht zu zeigen

i) es gibt $\beta \in \mathbb{R}$ $0<\beta<1$, es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$\boxed{\sqrt[k]{|a_k|} \leq \beta}$ für $k \geq k_0$ ⇒ Reihe absolut konvergent

ii) $\boxed{\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1}$ für ∞-viele $k \in \mathbb{N}$ ⇒ Reihe divergent

iii) keine der beiden Bedingungen → keine Aussage über Konvergenz

Umordnung: bijektive Abb. $\boxed{\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}}$ auf Indices einer Reihe

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}}$$

bei unendlichen Reihen bleibt der Wert danach nicht immer derselbe!

absolut konvergente komplexe Reihe hat Grenzwert A

⇒ jede ihrer Umordnungen hat Grenzwert A

Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ u. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} c_k}$ mit

$$\boxed{c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}}$$

$\sum a_n$ u. $\sum b_n$ absolut konvergent, $\sum c_k$ deren Cauchy-Produkt

⇒ $\sum c_k$ absolut konvergent, $\boxed{\sum c_k = A \cdot B}$

BRUNNEN

Potenzreihen I

$z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 0}$ komplexe Folge

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n}$$ Potenzreihe

a_n: Koeffizient z_0: Entwicklungspunkt

Abelsches Lemma: $r > 0$, $(a_n \cdot r^n)_{n \geq 0}$ beschränkt

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$ u. $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^j z^n}$ konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$

Konvergenzradius

$$\boxed{R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ beschränkt} \}}$$

- $R = 0 \Rightarrow$ Reihe konvergiert nur für $z = z_0$
- $0 < R < \infty \Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|z - z_0| < R$
  Reihe divergent für $|z - z_0| > R$
- $R = \infty \Rightarrow$ Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent

Cauchy-Hadamard

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert oder $= \infty$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

wir lassen zu: $\left(R = \frac{1}{0} = \infty \text{ u. } R = \frac{1}{\infty} = 0 \right)$!

Quotientenregel

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$ existiert oder $= \infty$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}}$$

Exponentialreihe

komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

Exponentialreihe $\boxed{z \longmapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$ $(\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{Q})$

$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ $\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

$z, w \in \mathbb{C}$ $x, y \in \mathbb{R}$

- $\boxed{\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)}$
- $\boxed{\exp(z) \neq 0}$, $\boxed{\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}}$
- $\boxed{\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}}$ $(\overline{z} = z^*)$
- $\boxed{\exp(x) > 0}$ ← rein reell
- $\boxed{|\exp(iy)| = 1}$ ← rein komplex
- $\boxed{|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\ z)}$

Potenzreihen II / Trigonometrie / k. Z.

$z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\Rightarrow R = \infty$

$x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\exp(ix) + \exp(-ix)\right) = \mathrm{Re}\left(\exp(ix)\right)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(\exp(ix) - \exp(-ix)\right) = \mathrm{Im}\left(\exp(ix)\right)$$

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Eulersche Identität

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ ✓

$(e^{i\varphi})^n = e^{i\psi} \not\Rightarrow e^{i\varphi} = e^{i\frac{\psi}{n}}$ ✗

$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \neq 0$ $\qquad$ $w = |w| \cdot e^{i\psi}$

- $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi + \psi)}$
- $\bar{z} = \overline{|z| \cdot e^{i\varphi}} = |z| \cdot e^{-i\varphi}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{|z|} \cdot e^{-i\varphi}$

$e^{\frac{2\pi}{n} \cdot i}$ ist n-te komplexe Wurzel aus 1

n-te Einheitswurzel : Nullstelle von $z^n - 1$

n-te komplexe Wurzeln aus $z \neq 0$ (n Stück):

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Potenzreihen III

$\boxed{F: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n}$, $\boxed{R > 0}$ Konvergenzradius

$\Rightarrow$ F ist stetig in jedem $w \in U_R(z_0)$

exp, cos, sin : Potenzreihen mit $R = \infty$

$\Rightarrow$ stetig auf $\mathbb{C}$